

**Stand: 06.05.2024**

Abfolge der Unterrichtsvorhaben

Vorschlag:

Die Fachkonferenz Mathematik legt sich darauf fest, dass zu Beginn jedes Schuljahres das jeweilige Jahrgangsteam festlegt, in welcher Abfolge die Unterrichtsvorhaben unterrichtet werden.

<b>Einführungsphase</b>	
<b>E-G1:</b> Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen	
<b>E-A1:</b> Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen	
<b>E-A2:</b> Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern	
<b>E-A3:</b> Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate	
<b>E-A4:</b> Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen	
<b>E-G2:</b> Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum	
Grundkurs Q1	Leistungskurs Q1
GK-A1: Optimierungsprobleme	LK-A1: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern
GK-A2: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS)	LK-A2: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS)
GK-A3: Von der Änderungsrate zum Bestand	LK-A3: Von der Änderungsrate zum Bestand
GK-A4: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und seine Anwendungen	LK-A4: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung
GK-G1: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen	LK-A5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion
GK-G2: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform	LK-G1: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen
GK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	LK-G2: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen
	LK-G3: Parametrisierung von Ebenen
	LK-G4: Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten
	LK-S1: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung
	LK-S2: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung
Grundkurs Q2	Leistungskurs Q2
GK-S2: Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binomialverteilung	LK-S3: Parameter und Prognosen – Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen
GK-S3: Änderungen und Auswirkungen - Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen	LK-S4: Vertrauen und Verlässlichkeit – Schätzen von Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Konfidenzintervallen
GK-A5: Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion	LK-S5: Alles normal? – Untersuchung und Anwendung von stetigen Zufallsgrößen
GK-A6: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln	LK-A6: Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen
GK-A7: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen	LK-A7: Zusammengesetzte Funktionen und Ableitungsregeln

GK-G3: Untersuchungen an geometrischen Körpern	LK-A8: Modellieren mit zusammengesetzten Funktionen
	LK-G5: Untersuchungen an geometrischen Körpern unter Einschluss ihrer Schatten- und Spiegelbilder
	LK-G6: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen

Inhaltsfeld	Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung Die Schülerinnen und Schüler...	Weitere Vereinbarungen
<b>Unterrichtsvorhaben E-G1</b> <i>Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen</i> <b>Zeitbedarf:</b> ca. 12 Ustd.		
<p><i>Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</i></p> <p><b>E-G1 Inhaltliche Schwerpunkte:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren</li> <li>• Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar</li> <li>• Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität</li> </ul>	<p><b>Konkretisierte Kompetenzerwartungen E-G1:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,</li> <li>(2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,</li> <li>(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,</li> <li>(4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,</li> <li>(5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,</li> <li>(6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.</li> </ol> <p><b>Prozessbezogene Kompetenzen E-G2:</b></p> <p>Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,</p> <p>Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,</p> <p>Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,</p> <p>Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,</p>	<p><b>Umsetzung E-G1:</b></p> <p>Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z.B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung).</p> <p>An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. Quader) wiederholen die Schülerinnen und Schüler die aus der Sekundarstufe I bekannten Schrägbilder und nutzen ein MMS, um unterschiedliche Schrägbilder darzustellen und hinsichtlich ihrer Wirkung zu beurteilen.</p> <p>Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.</p> <p>Verkettungen von Verschiebungen führen graphisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.</p> <p>Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Kanten) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.</p>

Inhaltsfeld	Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung Die Schülerinnen und Schüler...	Weitere Vereinbarungen
	<p>Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,</p> <p>Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,</p> <p>Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,</p> <p>Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,</p> <p>Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),</p> <p>Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,</p> <p>Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,</p> <p>Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,</p> <p>Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,</p> <p>Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.</p>	<p><i>Materialhinweis E-G1:</i></p> <p>Die Koordinatisierung des Raumes kann z.B. gewinnbringend im Kontext einer Spidercam-Steuerung entwickelt bzw. vertieft werden. (vgl. SINUS-Materialien zur Spidercam)</p> <p><a href="https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=1212&amp;idcat=378&amp;lang=9&amp;client=12&amp;matId=4356">https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=1212&amp;idcat=378&amp;lang=9&amp;client=12&amp;matId=4356</a></p> <p><i>Vernetzung E-G2:</i></p> <p>Physik: Kräfte und ihre Addition</p>

Inhaltsfeld	Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung Die Schülerinnen und Schüler...	Weitere Vereinbarungen
<b>Unterrichtsvorhaben E-G2</b> <i>Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum</i> <b>Zeitbedarf:</b> ca. 15 Ustd.		
<p><i>Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)</i></p> <p><b>E-G2 Inhaltliche Schwerpunkte:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar</li> <li>• Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität</li> <li>• Geraden und Strecken: Parameterform</li> <li>• Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend</li> <li>• Schnittpunkte: Geraden</li> </ul>	<p><b>Konkretisierte Kompetenzerwartungen E-G2:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,</li> <li>(6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach,</li> <li>(7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,</li> <li>(8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,</li> <li>(9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,</li> <li>(10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,</li> <li>(11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,</li> <li>(12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.</li> </ol> <p><b>Prozessbezogene Kompetenzerwartungen E-G2:</b></p> <p>Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,</p> <p>Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,</p> <p>Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,</p> <p>Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,</p> <p>Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,</p>	<p><b>Zur Umsetzung E-G2:</b></p> <p>Zunächst wird ein geometrisches Objekt in einem Sachkontext durch Vektoren beschrieben. Dabei werden wiederholend die aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 bekannten Eigenschaften und Operationen von Vektoren genutzt und vertieft, um parallele Seiten und besondere Punkte zu ermitteln. Daran anschließend werden lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.</p> <p>Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z.B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.</p> <p>Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.</p>

	<p>Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,</p> <p>Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,</p> <p>Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,</p> <p>Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,</p> <p>Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,</p> <p>Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,</p> <p>Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,</p> <p>Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,</p>	<p>Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3x2-Gleichungssystem. Einen Bezug zu den unterschiedlichen Lagebeziehungen können die SuS herstellen, wenn sie zugleich die auf eine Landkarte reduzierte Situation mit nur zwei Gleichungen untersuchen. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird ein MMS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gauß-Algorithmus) wird später in der Qualifikationsphase bei den Steckbriefaufgaben eingeführt und geübt.</p>
--	--	--

*Fortsetzung der prozessbezogenen Kompetenzen E-G2:*

- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
- Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
- Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter,
- Kom-(12) nehmen zu mathemathikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Inhaltsfeld	Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung Die Schülerinnen und Schüler...	Weitere Vereinbarungen
<b>Unterrichtsvorhaben E-A1</b> <i>Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen</i>		<b>Zeitbedarf:</b> ca. 12 Ustd.
<p><i>Funktionen und Analysis (A)</i></p> <p><b>E-A1 Inhaltliche Schwerpunkte:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen</i></li> <li>• <i>Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für <math>x \rightarrow \pm \infty</math></i></li> </ul>	<p><b>Konkretisierte Kompetenzerwartungen E-A1:</b></p> <p>(1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen</p> <p>(2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel</p> <p><b>Prozessbezogene Kompetenzerwartungen E-A1:</b></p> <p>Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,</p> <p>Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,</p> <p>Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,</p> <p>Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,</p> <p>Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,</p> <p>Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,</p> <p>Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum...</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,</li> <li>- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,</li> <li>- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,</li> </ul>	<p><b>Umsetzung E-A1:</b></p> <p>Die Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten werden mithilfe eines MMS untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitions- und Wertebereich, Verhalten für <math>x \rightarrow \pm \infty</math>). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und erklärt. Die Kompetenzen im Bereich der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.</p> <p>Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Mithilfe des Graphen werden schon in diesem Unterrichtsvorhaben Monotonie und (lokale) Extrempunkte fachsprachlich eingeführt und anschaulich diskutiert. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische Rechentechniken der Si ohne Hilfsmittel wiederholt und erweitert. Verschiedene Wege zur Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.</p> <p>Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des MMS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt.</p> <p><b>Materialhinweis E-A1:</b></p> <p>Material „EF-A1 Funktionsuntersuchung mit dem MMS“ im Lehrplannavigator: <a href="https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufeneue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html">https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufeneue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html</a></p>

Fortsetzung der *prozessbezogenen Kompetenzerwartungen E-A1*:

- Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
- Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
- Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern
- Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz
- Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele
- Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege
- Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
- Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
- Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Inhaltsfeld	Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung Die Schülerinnen und Schüler...	Weitere Vereinbarungen
<b>Unterrichtsvorhaben E-A2</b> Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern		<b>Zeitbedarf:</b> ca. 12 Ustd
<p><i>Funktionen und Analysis (A)</i></p> <p><b>E-A2 Inhaltliche Schwerpunkte:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für <math>x \rightarrow \pm \infty</math></li> <li>Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung</li> </ul>	<p><b>Konkretisierte Kompetenzerwartungen E-A2:</b></p> <p>(3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),</p> <p>(4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter.</p> <p><b>Prozessbezogene Kompetenzen E-A2:</b></p> <p>Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,</p> <p>Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum...</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen</li> <li>erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,</li> </ul> <p>Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,</p> <p>Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,</p> <p>Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,</p> <p>Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,</p>	<p><b>Umsetzung E-A2:</b></p> <p>Der entdeckende Einstieg in das Thema mithilfe eines MMS erfolgt mit einem anwendungsbezogenen Kontext (z.B. „Temperaturmittelwerte im Jahresverlauf“ oder „Sonnenscheindauer“), bei dem die aus der SI bekannte Sinusfunktion wiederholt und in Bezug auf Fachbegriffe (Amplitude, Periode) fundiert wird. Die Transformationen (Verschiebung und Streckung jeweils in Richtung beider Achsen) werden anknüpfend an eine Systematisierung und ausgehend von den quadratischen Funktionen (Scheitelpunktform) auf die Sinusfunktion und auf Potenzfunktionen übertragen. Dabei wird der Einfluss der Parameter auf die Eigenschaften dieser Funktionen erkundet. Erweitert wird das Thema der Transformationen noch um die Spiegelungen an den Koordinatenachsen. Bei Transformationen ganzrationaler Funktionen werden die Auswirkungen auf die im vorherigen Unterrichtsvorhaben betrachteten Eigenschaften sowie auf Extrempunkte untersucht. Für algebraische Operationen und graphische Darstellungen wird in diesem Unterrichtsvorhaben zunehmend ein MMS verwendet.</p> <p><b>Materialhinweis E-A2:</b></p> <p>Material „EF-A2 Beschreibung periodischer Vorgänge mithilfe der Sinusfunktion“ im Lehrplan-navigator:  <a href="https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufeneue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html">https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufeneue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html</a></p>

Fortsetzung der *prozessbezogenen Kompetenzerwartungen E-A2*:

- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele
- Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
- Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen auszunehmend komplexen mathemathikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
- Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Inhaltsfeld	Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung Die Schülerinnen und Schüler...	Weitere Vereinbarungen
<b>Unterrichtsvorhaben E-A3</b> <i>Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate</i> <b>Zeitbedarf:</b> ca. 18 Ustd.		
<p><i>Funktionen und Analysis (A)</i></p> <p><b>E-A3 Inhaltliche Schwerpunkte:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente</li> <li>• Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte</li> </ul>	<p><b>Konkretisierte Kompetenzerwartungen E-A3:</b></p> <p>(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,</p> <p>(6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,</p> <p>(7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise <math>\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)</math>,</p> <p>(8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen</p> <p>(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,</p> <p>(10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),</p> <p>(11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen,</p> <p>(13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten.</p>	<p><b>Umsetzung E-A3:</b></p> <p>In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, ...) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall-, Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen sollen auch Steigungen und Steigungswinkel in realen Sachkontexten (z.B. Brückenbögen, Gebäudeteile, Trassenführungen, Seilbahnen) betrachtet werden.</p> <p>Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird in den eingeführten Sachzusammenhängen vorstellungsgebunden genutzt. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät (z.B. mithilfe eines Lasers) ermittelten Geschwindigkeit genutzt.</p> <p>Ein MMS wird zur numerischen und graphischen Darstellung des Grenzüberganges von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) eingesetzt. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den in der SI aufgebauten Vorstellungen problematisiert und analytisch definiert.</p> <p>Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.</p>

	<p><i>Prozessbezogene Kompetenzen E-A3:</i></p> <p>Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,</p> <p>Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,</p> <p>Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,</p> <p>Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,</p> <p>Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,</p> <p>Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum...</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen</li> </ul> <p>Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,</p> <p>Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,</p>	<p>Anschließend wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limeschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet.</p> <p>Um die Ableitungsregel für (höhere) natürliche Potenzen zu vermuten, nutzen die Schülerinnen und Schüler ein MMS. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden.</p> <p>Der Unterricht erweitert hier besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens.</p> <p>Anhand von innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.</p>
--	---	---

Inhaltsfeld	Schwerpunkte der Kompetenzentwicklung Die Schülerinnen und Schüler...	Weitere Vereinbarungen
<b>Unterrichtsvorhaben E-A4</b> <i>Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen</i> <b>Zeitbedarf:</b> ca. 18 Ustd.		
<p><i>Funktionen und Analysis (A)</i></p> <p><b>E-A4 Inhaltliche Schwerpunkte:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte</li> </ul>	<p><b>Konkretisierte Kompetenzerwartungen E-A4:</b></p> <p>(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,</p> <p>(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,</p> <p>(12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,</p> <p>(13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,</p> <p>(14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln,</p> <p>(15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,</p> <p>(16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,</p> <p>(17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,</p> <p>(18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,</p> <p>(19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.</p>	<p><b>Zur Umsetzung E-A4:</b></p> <p>Die Beschäftigung mit ganzrationalen Funktionen vom Grad größer gleich drei erfordert auf der rechnerischen Ebene die Anwendung der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion und ihrer Ableitungsfunktion entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der beiden Graphen, woran im Folgenden angeknüpft wird.</p> <p>Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und den Nullstellen ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der möglichen Fälle bezogen auf Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung vertieft untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen.</p> <p>Ausgehend von graphischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.</p>

### Prozessbezogene Kompetenzerwartungen E-A4:

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
- Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
- Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
- Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
- Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
- Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
  - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
  - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,
- Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus,
- Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
- Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
- Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
- Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
- Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
- Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
- Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
- Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
  - Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
  - Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
  - Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
  - Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
  - Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
  - Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
- Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik und stellen charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
- Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
- Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
- Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
- Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
  - Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
  - Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
  - Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
  - Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,
- Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
- Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbalsprachlich) aus,
  - Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
  - Kom-(12) nehmen zu mathemathikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
  - Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.